13-1-16

Σειρές Fourier

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ λέγεται T-περιοδική, $T>0$ αν $f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

π.χ. Οι συναρτήσεις $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, $x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$ είναι 2π-περιοδικές

Πρόταση: Αν $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ T-περιοδικές $\Rightarrow$ α) f,g είναι Tk-περιοδικές, $\forall k\in\mathbb{N}$
β) $f+g$, fg T-περιοδικές
γ) αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο $[a,a+T]$ $\Rightarrow$ η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε $[\gamma,\delta]\subset\mathbb{R}$ και επίσης $\int_a^{a+T} f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$

και θα λέμε ότι η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ορισμός: Ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right),\ x\in\mathbb{R},\ \frac{a_0}{2},a_n,b_n\in\mathbb{R}$$
ονομάζεται (πραγματικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο.
Και μια σειρά συναρτήσεων της μορφής
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right),\ x\in\mathbb{R},\ \frac{a_0}{2},(a_n)_{n\in\mathbb{N}},(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$$
ονομάζεται (πραγματική) τριγωνομετρική σειρά

Παρατήρηση: Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα (και άρα και τα μερικά αθροίσματα της τριγωνομετρικής σειράς) είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις.

Ορισμός: Μια ακολουθία συναρτήσεων $\varphi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ με $\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=\delta_{nm}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}$, $\forall n,m\in\mathbb{N}$

ονομάζεται ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων στο $[a,b]$

<u>Πρόταση</u>: Η ακολουθία συναρτήσεων $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\right.$ $\left.\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(2x)}{\sqrt{\pi}}, \dots\right)$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων σε κάθε $[a, a+2\pi]$, $a\in\mathbb{R}$

<u>Πρόταση</u>: Έστω ότι η τριγωνομετρική σειρά $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$ $\Longrightarrow$ τότε η σειρά αυτή συγκλίνει ομοιόμορφα σ' όλο το $\mathbb{R}$ και το όριο της $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, $x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχές και 2π περιοδικό και ισχύει $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,dx$, $n\in\mathbb{N}_0$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$, $n\in\mathbb{N}$

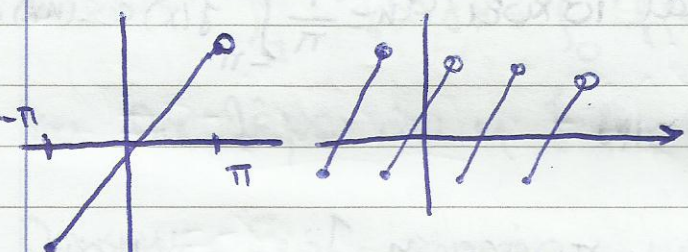
<u>Παρατήρηση</u>: Η προηγούμενη πρόταση λέει ότι αν μια τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ένα διάστημα μήκους 2π, τότε οι συντελεστές της a_n, b_n εκφράζονται μοναδικά μέσω του ορίου της. <u>Επίσης</u>, βλέπουμε ότι τα πιο πάνω a_n, b_n ορίζονται για κάθε συνάρτηση f που είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο $[a, a+2\pi]$ και άρα για κάθε τέτοιο f μπορούμε να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά.

<u>Ερώτημα</u>: Ποια η σχέση της τριγωνομετρικής σειράς αυτής με την f, δηλαδή για ποια f η αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει στην f. [Η f πάντα πραγματική]

Ορισμός: Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη, τότε η τριγωνομετρική σειρά $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$, $n\in\mathbb{N}_0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$, λέγεται σειρά Fourier της f και οι αριθμοί $\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$ λέγονται συντελεστές Fourier της f και γράφουμε $f(x)\sim S_f(x)$. Αν $f=S_f$, τότε λέμε ότι η f αναπτύσσεται σε σειρά Fourier.

π.χ) Έστω η $f(x)=x$ στο $[-\pi,\pi]$. Τότε μπορούμε να την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$, θέτοντας $f(x+2\pi n)=f(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ και $a_n=0$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$,



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \ldots = \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

Παρατήρηση: Αν η f είναι περιττή, τότε $a_n=0$, αν η f είναι άρτια τότε $b_n=0$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ονομάζεται κατά τμήματα C^1 (ή κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη) αν υπάρχει διαμέριση του $[a,b]$ έτσι ώστε σε κάθε υποδιάστημα η f να είναι C^1 (δηλ. συνεχώς διαφορίσιμη)

Θεώρημα (ΒΑΣΙΚΟ): Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-περιοδική και κατά τμήματα C^1 στο $[-\pi,\pi]$ $\Longrightarrow$

α) $S_f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, όπου $f(x\pm) = \lim_{y\to x\pm} f(y)$

β) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής, τότε η S_f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και η 2π-περιοδική και κατά τμήματα συνεχής παράγωγος f' έχει σειρά Fourier την κατά όρο παράγωγο της S_f, δηλ. $f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (n b_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx)) = \frac{f'(x+)+f'(x-)}{2}$.
(σίγουρα αν η f είναι κατά τμήματα C^2)

<u>Παρατήρηση</u>: Σε περίπτωση που η f είναι 2π-περιοδική και άπειρες φορές διαφορίσιμη, όλες οι παράγωγοι προκύπτουν από την κατά όρο παραγώγιση της σειράς Fourier.

<u>Παρατήρηση</u>: Τα παραπάνω ισχύουν και για οποιαδήποτε p-περιοδική, $p>0$ επαρκώς λεία συνάρτηση:
Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ p-περιοδική. Τότε η $g(x) := f\left(\frac{p}{2\pi} x\right)$ είναι 2π-περιοδική και αν είναι ολοκληρώσιμη έχουμε $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{p}\right)dx$,

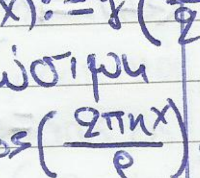
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{p}\int_{-p/2}^{p/2} f(x)\sin(2\pi n x/p)\,dx$ και έχει (η f) σειρά Fourier $S_f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right)\right)$ [$\cos\left(\frac{2\pi}{p}nx\right), \sin\left(\frac{2\pi}{p}nx\right)$ ορθοκανονικό ως προς $\int_{-p/2}^{p/2} \varphi(x)\psi(x)\,dx$]

<u>§3.2.1 Η εξίσωση θερμότητας στο $[0,l] \subset \mathbb{R}$ με συνοριακές συνθήκες Dirichlet</u>

$$(1_{\Theta\Delta}): \begin{cases} u_t = K u_{xx}, & 0<x<l,\ t>0,\ K>0 \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & \forall\, t \geq 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall\, 0 \leq x \leq l \end{cases} \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(l) = 0$$

σταθερά

Εδώ θέλω να είναι 0 η συνάρτηση



συνοριακές συνθήκες

αρχικές συνθήκες

Θεωρούμε το επί μέρους πρόβλημα (2ΘΟ): $\begin{cases} V_t = kV_{xx} \\ V(0,t)=V(l,t)=0, \forall t>0 \end{cases}$

και επιπλέον αναζητούμε λύσεις χωριζομένων μεταβλητών, $V(x,t) = X(x)T(t)$ (Π) → (παραδοχή)

$\xrightarrow{(2ΘΟ)} X(x)T'(t) = kX''(x)T(t)$

$\xrightarrow{kX(x)T(t)\neq 0} \dfrac{T'(t)}{kT(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ σταθερά

$\Rightarrow \begin{cases} T'(t) = -\lambda k T(t), \; t>0 \Rightarrow T(t) = Ae^{-\lambda k t}, \; t>0, \; A\in\mathbb{R} \text{ σταθερά} \\ -X''(x) = \lambda X(x), \; 0<x<l \xrightarrow[(2ΘΟ)\,(Π)]{A\neq 0} X(0)=X(l)=0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Βρες $\lambda\in\mathbb{R}$ και $X\not\equiv 0$ έτσι ώστε να ισχύει

(SL): $\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), \; 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$ [ΠΣΤ, πρόβλημα ιδιοτιμών, πρόβλημα Sturm-Liouville]

$(SL) \Rightarrow \underbrace{-\int_0^l X''(x)X(x)\,dx}_{} = \lambda\int_0^l X^2(x)\,dx$

$= \underbrace{-X'(x)X(x)\Big|_{x=0}^{l}}_{=0 \text{ (από συνθήκες)}} + \int_0^l (X')^2(x)\,dx$

$\Rightarrow \lambda \geq 0 \xrightarrow{X\not\equiv 0} \lambda>0, \; \lambda = b^2, \; b>0 \xrightarrow{(SL)} X''(x) + b^2X(x) = 0$

$\Rightarrow X(x) = C\cos(bx) + D\sin(bx)$

$\xrightarrow{X(0)=0} C=0 \Rightarrow X(x) = D\sin(bx)$

$\xrightarrow[D\neq 0]{X(l)=0} bl = n\pi, \; n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ οι ιδιοτιμές που κάνουν την δουλειά είναι οι $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, με ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \; n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Τα $V(x,t) = X(x)T(t)$ $(\not\equiv 0)$ και λύνουν το πρόβλημα (2ΘΟ) είναι της μορφής $V_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt}\sin\frac{n\pi x}{l}$

και όλοι οι γραμμικοί συνδυασμοί τέτοιων επιλύουν το (2ΘΔ).

Επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα (1ΘΔ)=(2ΘΔ) + $u(x,0)=\varphi(x)$ με την συνθήκη συμβατότητας $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$ και βλέπουμε ότι η $u(x,t)=\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 kt} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ λύνει το (1ΘΔ) αν $u(x,0)=\sum_{n=1}^{N} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)=\varphi(x)$, $\varphi:[0,\ell]\to\mathbb{R}$

Από την προηγούμενη (πεπερασμένη) ιδέα, ~~επεκτείνουμε~~ ~~...~~ επεκτείνουμε την $\varphi:[0,\ell]\to\mathbb{R}$ περιττά στο $[-\ell,\ell]$,

$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in(0,\ell)\\ -\varphi(-x), & x\in(-\ell,0)\end{cases}$ και μετά την $\tilde{\varphi}:(-\ell,\ell)\to\mathbb{R}$, 2ℓ-περιοδικά στο $\mathbb{R}$,

$\varphi_{\varepsilon\pi\varepsilon\kappa\tau.}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

και έστω $\varphi_{\varepsilon\pi\varepsilon\kappa\tau.}$ συνεχής και κατά τμήματα $C^1 \Longrightarrow$

$\varphi_{\varepsilon\pi\varepsilon\kappa\tau.}(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$, $x\in\mathbb{R}$ με $b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$

$\Longrightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt}\sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$, με τα πιο πάνω b_n είναι λύση του (1ΘΔ) [καταρχάς, τοπικά, δηλαδή μεταφέροντας τα $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ «μέσα» από το $\sum_{n=1}^{\infty}\dots$ το οποίο όμως επιτρέπεται λόγω του θεωρήματος (βασικού)]

[Να δω π.χ λυμένο στο βιβλίο]